Méthodes mathématiques pour la physique
(examen du 13/06/2008)

Exercice 1. Considérons la fonction $f(x) = |x+1| - |x-1|$. Calculer $\dfrac{df}{dx}$ et $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ au sens des distributions (c'est-à-dire, trouver $(T_f)'$ et $(T_f)''$).

Exercice 2. Considérons la fonction $f(x)$ de période 2 définie par

$$f(x) = |x| \qquad \text{pour } -1 < x \leq 1.$$

1. Développer cette fonction en série de Fourier.
2. Ecrire l'identité de Parseval correspondant à cette série de Fourier.

Exercice 3. En utilisant la méthode des fonctions de Green, trouver la solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^3,$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Vérifier le résultat.

Exercice 4. En utilisant la méthode des fonctions de Green, trouver la solution $y(x)$ de la même équation différentielle

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^3,$$

vérifiant les conditions limites $y'(-1) = 0$, $y(1) = 0$. Expliquer pourquoi la méthode des fonctions de Green n'est pas appliquable aux conditions limites $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$.